512.22
W74u

irth, J.

THE UNIVERSITY
OF ILLINOIS
LIBRARY
512.72 ~~512.863~~
W74u
MATHEMATICS
DEPARTMENT

LIBRARY U. OF I., URBANA-CHAMPAIGN

Return this book on or before the
Latest Date stamped below.

University of Illinois Library

JAN 3 0 1984

L161—H41

ÜBER DIE ELEMENTARTEILER
EINER LINEAREN HOMOGENEN SUBSTITUTION

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR ERLANGUNG DER

PHILOSOPHISCHEN DOKTORWÜRDE

VORGELEGT DER

HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

DER

ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT ZU FREIBURG I. BR.

VON

JOSEPH WIRTH

AUS

FREIBURG I. BR.

FREIBURG I. BR.
C. A. WAGNERS UNIVERSITÄTSBUCHDRUCKEREI
1906

Digitized by the Internet Archive
in 2021 with funding from
University of Illinois Urbana-Champaign

https://archive.org/details/uberdieelementar00wirt

512.22
W74u
UNIVERSITY OF ILLINOIS LIBRARY URBANA

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit will auf Anregung von Herrn Professor Alfred Loewy eine Anwendung der von ihm über die Reduzibilität der Gruppen linearer homogener Substitutionen von nicht verschwindender Determinante bewiesenen Sätze geben [1].

Es soll der einfachste Fall einer Gruppe linearer homogener Substitutionen, nämlich eine Gruppe, die aus den positiven und negativen Potenzen einer linearen homogenen Substitution von nicht verschwindender Determinante besteht, untersucht werden.

Im ersten Teil der Arbeit werden den Koeffizienten jener Substitution, welche die Gruppe erzeugt, keinerlei Beschränkungen auferlegt. Es handelt sich um den Rationalitätsbereich aller Zahlen, der als Zahlkörper für die Substitutionskoeffizienten zu Grunde gelegt wird. Auf Grund der allgemeinen Theorie lässt sich jeder beliebigen Gruppe linearer homogener Substitutionen, die unter Zugrundelegung des Körpers aller Zahlen untersucht wird, infolge der zu der Gruppe gehörigen, aufeinander folgenden grössten vollständig reduziblen Gruppen ein System invarianter Zahlen zuordnen. Für unsern besonderen Fall ist dieses System invarianter Zahlen in innigstem Zusammenhang mit den Weierstrassschen Elementarteilerexponenten der charakteristischen Funktion der die Gruppe erzeugenden Substitution. Es wird sich ergeben, dass aus dem erwähnten Loewyschen System invarianter Zahlen mit Hilfe des Begriffes der assoziierten Zahlen eines gegebenen Zahlen-

[1] Für das Folgende ist zu vergleichen:

A. Loewy, Ueber reduzible Gruppen linearer homogener Substitutionen. Verhandlungen des III. internationalen Mathematikerkongresses in Heidelberg 1904, S. 194.

A. Loewy, Ueber die Reduzibilität der Gruppen linearer homogener Substitutionen. Transactions of the American Math. Society. Volume 4, 1903, S. 44.

A. Loewy, Ueber die vollständig reduziblen Gruppen, die zu einer Gruppe linearer homogener Substitutionen gehören. Transactions of the American Math. Society. 1905. Volume 6, S. 504.

27 Ag 14 GRACE BARNES
25 Ap 14 Brechen 95
Mathematics Research
280040

systems die Weierstrassschen Elementarteilerexponenten unmittelbar folgen, und umgekehrt kann aus den Weierstrassschen Elementarteilerexponenten der die Gruppe erzeugenden Substitution das der Gruppe zugehörige System invarianter Zahlen abgeleitet werden.

Im zweiten Teil der Arbeit gehören die Koeffizienten der zu untersuchenden Gruppe linearer homogener Substitutionen, die ebenfalls durch eine Substitution von nicht verschwindender Determinante und deren positive und negative Potenzen erzeugt wird, sämtlich einem besonderen Zahlkörper Ω an. Mit Hilfe von Sätzen, welche den im ersten Teil zitierten analog sind, lässt sich wieder zu jeder beliebigen Gruppe linearer homogener Substitutionen mit Koeffizienten aus Ω ein zugehöriges System invarianter Zahlen definieren.

Es wird dann unsere Aufgabe sein, nachzuweisen, dass das System der invarianten Zahlen einer Gruppe linearer homogener Substitutionen, die aus einer Substitution von nicht verschwindender Determinante mit Koeffizienten aus Ω und deren Potenzen besteht, identisch ist mit den invarianten Zahlen derselben Gruppe linearer homogener Substitutionen, wenn die Untersuchung für den Körper aller Zahlen geführt wird, oder, dass das System invarianter Zahlen von dem Zahlkörper Ω unabhängig ist.

UNIVERSITY OF ILLINOIS LIBRARY URBANA

Erster Teil.

§ 1.

$\mathfrak{G}$ sei eine Gruppe linearer homogener Substitutionen in n Variablen. Die Gruppe $\mathfrak{G}$ heisst reduzibel, wenn es eine konstante Matrix $n$ten Grades T von nicht verschwindender Determinante gibt, so dass jede Matrix der zu $\mathfrak{G}$ ähnlichen Gruppe

$$\mathfrak{A} = T\mathfrak{G}T^{-1}$$

von folgender Form wird:

$$\begin{array}{cccccccc}
a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1m} & 0 & 0 \cdots & 0 \\
a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2m} & 0 & 0 \cdots & 0 \\
\cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\
a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mm} & 0 & 0 \cdots & 0 \\
a_{m+1,1} & a_{m+1,2} \cdots & a_{m+1,m} & a_{m+1,m+1} & a_{m+1,m+2} \cdots & a_{m+1,n} \\
a_{m+2,1} & a_{m+2,2} \cdots & a_{m+2,m} & a_{m+2,m+1} & a_{m+2,m+2} \cdots & a_{m+2,n} \\
\cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\
a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nm} & a_{n,m+1} & a_{n,m+2} \cdots & a_{nn},
\end{array}$$

wobei $m < n$ sein muss.

Sind alle Matrices der Gruppe $\mathfrak{A}$ von obiger Form, so soll $\mathfrak{A}$ auch mit

$$\begin{array}{cc}
\mathfrak{A}_{11} & 0 \\
\mathfrak{A}_{21} & \mathfrak{A}_{22}
\end{array}$$

bezeichnet werden.

Dabei bedeutet $\mathfrak{A}_{11}$ die Gesamtheit der Matrices $m$ten Grades, die von der Form sind:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mm} \end{matrix}.$$

$\mathfrak{A}_{11}$ ist somit eine zu $\mathfrak{A}$ isomorphe Gruppe. $\mathfrak{A}_{22}$ umfasst alle Substitutionen, die durch die Matrices $(n - m)$ten Grades:

$$\begin{matrix} a_{m+1,m+1} & a_{m+1,m+2} \cdots & a_{m+1,n} \\ a_{m+2,m+1} & a_{m+2,m+2} \cdots & a_{m+2,n} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ a_{n,m+1} & a_{n,m+2} \cdots & a_{n,n} \end{matrix}$$

definiert werden. $\mathfrak{A}_{22}$ ist ebenso wie $\mathfrak{A}_{11}$ eine zu $\mathfrak{A}$ isomorphe Gruppe. $\mathfrak{A}_{21}$ enthält alle Matrices, die aus $\mathfrak{A}$ hervorgehen, indem man in sämtlichen Matrices der Gruppe $\mathfrak{A}$ die ersten m Zeilen und die letzten $n - m$ Kolonnen streicht.

Ausser dem Begriff der reduziblen Gruppe benötigen wir für das folgende noch den der vollständig reduziblen Gruppe linearer homogener Substitutionen.

Eine Gruppe $\mathfrak{G}$ linearer homogener Substitutionen heisst vollständig reduzibel, wenn es wenigstens eine konstante Matrix R von nicht verschwindender Determinante gibt, so dass die zu $\mathfrak{G}$ ähnliche Gruppe $\mathfrak{A} = R\mathfrak{G}R^{-1}$ von der Form ist:

$$\begin{matrix} \mathfrak{a}_{11} & 0 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & \mathfrak{a}_{22} & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{a}_{33} \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \cdots & \mathfrak{a}_{\lambda\lambda}, \end{matrix}$$

die Diagonale nur irreduzible Bestandteile enthält und ferner ausserhalb der Diagonale nur Nullmatrices stehen. Ist $\lambda = 1$, so ist $\mathfrak{G}$ selbst eine irreduzible Gruppe. Der Begriff der vollständig reduziblen Gruppen schliesst den der irreduziblen Gruppen ein.

Die Gruppe $\mathfrak{G}$ lasse sich in eine zu $\mathfrak{G}$ ähnliche Gruppe $\mathfrak{A}^*$ von folgender Form transformieren:

$$\begin{matrix} \mathfrak{A}^*_{11} & 0 \\ \mathfrak{A}^*_{21} & \mathfrak{A}^*_{22}. \end{matrix}$$

Dabei seien $\mathfrak{A}^*_{11}$, $\mathfrak{A}^*_{21}$, $\mathfrak{A}^*_{22}$ Inbegriffe von Matrices mit m Zeilen und m Kolonnen, bzw. $n - m$ Zeilen und m Kolonnen, bzw. $n - m$ Zeilen und $n - m$ Kolonnen.

„Definiert $\mathfrak{A}^*_{11}$, für sich betrachtet, eine vollständig reduzible Gruppe linearer homogener Substitutionen, und existiert keine Matrix L von nicht verschwindender Determinante, welche die Gruppe $\mathfrak{G}$ in eine ähnliche $L\mathfrak{G}L^{-1}$ der Form:

$$\begin{matrix} \mathfrak{A}^*_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{\lambda+1,\,\lambda+1} & 0 \\ \mathfrak{A}^*_{31} & \mathfrak{A}^*_{32} & \mathfrak{A}^*_{33} \end{matrix}$$

überführt, wobei $a_{\lambda+1,\,\lambda+1}$ eine irreduzible Gruppe linearer homogener Substitutionen in $f_{\lambda+1} (f_{\lambda+1} > 0)$ Variablen bedeute und demnach $\mathfrak{A}^*_{31}$, $\mathfrak{A}^*_{32}$, $\mathfrak{A}^*_{33}$ Matrices mit $n - m - f_{\lambda+1}$ Zeilen und m, bzw. $f_{\lambda+1}$, bzw. $n - m - f_{\lambda+1}$ Kolonnen vorstellen, so sagen wir: Die Gruppe $\mathfrak{G}$ ist unter Hervorhebung ihrer grössten vollständig reduziblen Gruppe $\mathfrak{A}^*_{11}$ in die Gruppe $\mathfrak{A}^*$ transformiert worden.“ (Transactions 6, 518.)

Es gilt nun folgender Satz:

„Wie auch immer eine Gruppe $\mathfrak{G}$ linearer homogener Substitutionen unter Hervorhebung ihrer grössten vollständig reduziblen Gruppe in eine ähnliche transformiert wird, so hat die grösste vollständig reduzible Gruppe, die sich bei irgend einer derartigen Darstellung der Gruppe $\mathfrak{G}$ ergibt, gleichviele Variablen wie die grösste vollständig reduzible Gruppe, die sich bei irgend einer andern Darstellung von $\mathfrak{G}$ ergibt, und beide Gruppen sind ähnlich. Sieht man ähnliche Gruppen linearer homogener Substitutionen als nicht verschieden an, so ist die grösste vollständig reduzible Gruppe von $\mathfrak{G}$ eindeutig bestimmt.“ (Transactions 6, 526.)

Jede Gruppe $\mathfrak{G}$ linearer homogener Substitutionen lässt sich durch eine Matrix P von nicht verschwindender Determinante in eine ähnliche Gruppe $\mathfrak{A}^* = P\mathfrak{G}P^{-1}$ transformieren, so dass $\mathfrak{A}^*$ die Gestalt hat:

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{A}^*_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \cdot \cdot \cdot \cdot 0 \\ \mathfrak{A}^*_{21} & \mathfrak{A}^*_{22} & 0 & 0 & 0 \cdot \cdot \cdot \cdot 0 \\ \mathfrak{A}^*_{31} & \mathfrak{A}^*_{32} & \mathfrak{A}^*_{33} & 0 & 0 \cdot \cdot \cdot \cdot 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathfrak{A}^*_{\mu 1} & \mathfrak{A}^*_{\mu 2} & \mathfrak{A}^*_{\mu 3} & \mathfrak{A}^*_{\mu 4} & \mathfrak{A}''_5 \cdot \cdot \cdot \cdot \mathfrak{A}^*_{\mu\mu} \end{array}$$

Dabei bedeutet $\mathfrak{A}^*_{11}$ die grösste vollständig reduzible Gruppe von $\mathfrak{A}^*$.

Durch Streichen der ersten Zeile und Kolonne bei der vorstehenden symbolischen Schreibart geht die neue Gruppe hervor:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{A}^*_{22} & 0 & 0 \cdot \cdot \cdot \cdot 0 \\ \mathfrak{A}^*_{32} & \mathfrak{A}^*_{33} & 0 \cdot \cdot \cdot \cdot 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathfrak{A}^*_{\mu 2} & \mathfrak{A}^*_{\mu 3} & \mathfrak{A}^*_{\mu 4} \cdot \cdot \cdot \cdot \mathfrak{A}^*_{\mu\mu} \end{array}$$

Es sei $\mathfrak{A}^*_{22}$ die grösste vollständig reduzible Gruppe dieser neuen Gruppe. Streichen wir auch bei dieser symbolischen Schreibart wieder die erste Zeile und Kolonne, so bedeute $\mathfrak{A}^*_{33}$ die grösste vollständig reduzible Gruppe der Gruppe:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{A}^*_{33} & 0 & 0 \cdot \cdot \cdot \cdot 0 \\ \mathfrak{A}^*_{43} & \mathfrak{A}^*_{44} & 0 \cdot \cdot \cdot \cdot 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathfrak{A}^*_{\mu 3} & \mathfrak{A}^*_{\mu 4} & \mathfrak{A}^*_{\mu 5} \cdot \cdot \cdot \cdot \mathfrak{A}^*_{\mu\mu} \end{array}$$

So fahren wir fort und kommen schliesslich zur grössten vollständig reduziblen Gruppe $\mathfrak{A}^*_{\mu\mu}$.

Die soeben besprochene Transformation der Gruppe $\mathfrak{G}$ in eine zu $\mathfrak{G}$ ähnliche Gruppe heisst eine Transformation der Gruppe $\mathfrak{G}$ unter Hervorhebung aller aufeinander folgender grösster vollständig

reduzibler Gruppen. $\mathfrak{A}_{11}^*$ heisst die erste, $\mathfrak{A}_{22}^*$ die zweite, $\mathfrak{A}_{\mu\mu}^*$ die μte grösste vollständig reduzible Gruppe, die sich bei der Transformation der Gruppe $\mathfrak{G}$ in die Gruppe $\mathfrak{A}^*$ ergeben haben. Sieht man ähnliche Gruppen linearer homogener Substitutionen als nicht verschieden an, so sind $\mathfrak{A}_{11}^*$, $\mathfrak{A}_{22}^*$, $\cdots$, $\mathfrak{A}_{\mu\mu}^*$ eindeutig bestimmt. Es gilt nämlich folgender Fundamentalsatz:

„Wie auch immer eine Gruppe $\mathfrak{G}$ linearer homogener Substitutionen unter Hervorhebung aller aufeinander folgender grösster vollständig reduzibler Gruppen in eine ähnliche Gruppe transformiert wird, so sind die vollständig reduziblen Gruppen, die sich bei einer derartigen Darstellung von $\mathfrak{G}$ ergeben, den vollständig reduziblen Gruppen, die sich bei irgend einer andern solchen Darstellung von $\mathfrak{G}$ ergeben, der Reihe nach zugeordnet, so dass zwei zugeordnete vollständig reduzible Gruppen gleichviele Variablen haben und ähnliche Gruppen sind.“ (Transactions 6, 508.)

§ 2.

Auf Grund der im § 1 aus der allgemeinen Theorie der Gruppen linearer homogener Substitutionen angeführten Sätze kann man jeder Gruppe linearer homogener Substitutionen ein System invarianter Zahlen zuordnen.

Transformieren wir eine Gruppe $\mathfrak{G}$ linearer homogener Substitutionen unter Hervorhebung aller aufeinander folgender, grösster vollständig reduzibler Gruppen in eine zu $\mathfrak{G}$ ähnliche Gruppe $\mathfrak{A}^*$, so ist durch jede der grössten vollständig reduziblen Gruppen $\mathfrak{A}_{11}^*$, $\mathfrak{A}_{22}^*$, $\cdots$, $\mathfrak{A}_{\mu\mu}^*$ eine Zahl n_1, bzw. n_2, bzw. n_μ bestimmt. Dabei bedeutet n_1, bzw. n_2, bzw. n_μ die Gesamtzahl der Variablen der Gruppen $\mathfrak{A}_{11}^*$, bzw. $\mathfrak{A}_{22}^*$, bzw. $\mathfrak{A}_{\mu\mu}^*$.

Ergibt die Transformation der Gruppe $\mathfrak{G}$ unter Hervorhebung aller aufeinander folgender grösster vollständig reduzibler Gruppen in eine zu $\mathfrak{G}$ ähnliche, von $\mathfrak{A}^*$ verschiedene Gruppe $\mathfrak{B}^*$ die grössten vollständig reduziblen Gruppen $\mathfrak{B}_{11}^*$, $\mathfrak{B}_{22}^*$, $\cdots$, $\mathfrak{B}_{\mu\mu}^*$, so sind diese der Reihe nach den Gruppen $\mathfrak{A}_{11}^*$, $\mathfrak{A}_{22}^*$, $\cdots$, $\mathfrak{A}_{\mu\mu}^*$ ähnlich. Betrachtet man die Anzahl der Variablen in den Gruppen $\mathfrak{B}_{11}^*$, $\mathfrak{B}_{22}^*$, $\cdots$, $\mathfrak{B}_{\mu\mu}^*$, so ist dieses Zahlensystem, da ähnliche Gruppen gleiche Variablenzahl besitzen, wieder obiges System der Zahlen n_1, n_2, $\cdots$, n_μ.

Die Zahlen n_1, n_2, $\cdots$, n_μ bilden also ein der Gruppe $\mathfrak{G}$ und allen ihr ähnlichen Gruppen zugeordnetes System invarianter Zahlen; sie sind nicht nur ihren Werten, sondern auch ihrer Reihenfolge nach eindeutig bestimmt. Die Zahlen n_1, n_2, $\cdots$, n_μ nennen

wir mit Rücksicht auf ein im folgenden noch weiter einzuführendes Zahlensystem das Hauptsystem invarianter Zahlen der Gruppe.

Es wird unsere Aufgabe sein, nachzuweisen, dass die Weierstrassschen Elementarteilerexponenten, die sich bei der Zerlegung der charakteristischen Funktion einer beliebigen linearen homogenen Substitution G von nicht verschwindender Determinante in ihre Elementarteiler ergeben, mit unserem Hauptsystem invarianter Zahlen bei geeigneter Wahl einer die Substitution enthaltenden Gruppe in innigstem Zusammenhange stehen.

§ 3.

Um den Zusammenhang unseres Hauptsystems invarianter Zahlen mit den Weierstrassschen Elementarteilerexponenten einer beliebigen Substitution von nicht verschwindender Determinante darzulegen, betrachten wir die Substitution G nicht isoliert, sondern wir untersuchen die spezielle Gruppe $\mathfrak{G}$ linearer homogener Substitutionen, die aus den positiven und negativen Potenzen der Substitution G besteht.

Die Substitution G laute:

$$\begin{aligned} x_1 &= g_{11}\, x_1' + g_{12}\, x_2' + \cdots + g_{1n}\, x_n', \\ x_2 &= g_{21}\, x_1' + g_{22}\, x_2' + \cdots + g_{2n}\, x_n', \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= g_{n1}\, x_1' + g_{n2}\, x_2' + \cdots + g_{nn}\, x_n'. \end{aligned}$$

Die charakteristische Funktion der linearen homogenen Substitution G, nämlich $|\rho E - G|$, zerlegen wir in ihre Elementarteiler:

$$|\rho E - G| = (\rho - \rho_1)^{e_1} \cdot (\rho - \rho_2)^{e_2} \cdots (\rho - \rho_m)^{e_m}.$$

Dabei sei die Bezeichnung derartig, dass:

$$e_1 \geqq e_2 \geqq \cdots \geqq e_m.$$

Durch Einführung linearer homogener Funktionen der Variablen $x_1, x_2, \cdots, x_n$ als neue Variable und cogrediente Transformation von $x_1', x_2', \cdots, x_n'$ lässt sich G auf eine Normalform $\overline{G}$ bringen, die uns wesentliche Vorteile bringen wird. C. Jordan hat diese Normalform

in seinem Traité des substitutions (Paris 1870, Livre II, Chapitre II, §§ 5 und 6) angegeben. $\overline{G}$ lautet:

$$\xi_1 = \rho_1 \xi'_1 \quad , \quad \xi_{e_1+1} = \rho_2 \xi'_{e_1+1} \quad , \cdots, \quad \xi_{n-e_m+1} = \rho_m \xi'_{n-e_m+1}$$

$$\xi_2 = \xi'_1 + \rho_1 \xi'_2, \quad \xi_{e_1+2} = \xi'_{e_1+1} + \rho_2 \xi'_{e_1+2}, \cdots, \quad \xi_{n-e_m+2} = \xi'_{n-e_m+1} + \rho_m \xi'_{n-e_m+2}$$

$$\xi_3 = \xi'_2 + \rho_1 \xi'_3, \quad \xi_{e_1+3} = \xi'_{e_1+2} + \rho_2 \xi'_{e_1+3}, \cdots, \quad \xi_{n-e_m+3} = \xi'_{n-e_m+2} + \rho_m \xi'_{n-e_m+3}$$

. . . . . .

$$\xi_{e_1} = \xi'_{e_1-1} + \rho_1 \xi'_{e_1}, \quad \xi_{e_1+e_2} = \xi'_{e_1+e_2-1} + \rho_2 \xi'_{e_1+e_2}, \cdots, \quad \xi_n = \xi'_{n-1} + \rho_m \xi'_n .$$

An Stelle der Gruppe $\mathfrak{G}$ untersuchen wir nun die zu $\mathfrak{G}$ ähnliche Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$, die aus der Substitution $\overline{G}$ und deren positiven und negativen Potenzen besteht. Die Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ bietet uns den Vorteil, dass die aufeinander folgenden grössten vollständig reduziblen Gruppen sofort in Evidenz treten.

Die erste grösste vollständig reduzible Gruppe von $\overline{\mathfrak{G}}$ wird ersichtlich bestimmt durch die bei $\overline{G}$ in der ersten Zeile stehende Transformation:

$$\xi_1 = \rho_1 \xi'_1 \quad , \quad \xi_{e_1+1} = \rho_2 \xi'_{e_1+1}, \cdots, \xi_{n-e_m+1} = \rho_m \xi'_{n-e_m+1}$$

und ihre positiven und negativen Potenzen.

Dass diese Transformation die erste grösste vollständig reduzible Gruppe erzeugt, geht daraus hervor, dass durch Hinzufügung einer weiteren Variablen die Gruppe aufhört, vollständig reduzibel zu sein.

Die Gesamtzahl der Variablen der ersten grössten vollständig reduziblen Gruppe ist m. Die erste Zahl unseres Hauptsystems invarianter Gruppenzahlen ist somit die Zahl m.

Durch Streichen der Variablen

$$\xi'_1, \quad \xi'_{e_1+1}, \cdots, \quad \xi'_{n-e_m+1}$$

in der zweiten Zeile bei $\overline{G}$ erhalten wir die Transformation:

$$\xi_2 = \rho_1 \xi'_2, \qquad \xi_{e_1+2} = \rho_2 \xi'_{e_1+2}, \cdots, \xi_{n-e_m+2} = \rho_m \xi'_{n-e_m+2} .$$

Diese Transformation mit ihren positiven und negativen Potenzen liefert die zweite grösste vollständig reduzible Gruppe mit wieder m Variablen.

Die zweite Zahl unseres Hauptsystems invarianter Zahlen ist demnach auch m. Mit diesem Streichen können wir fortfahren, bis die letzte Kolonne der C. Jordanschen Normalform $\overline{G}$ erschöpft ist. Auf diese Weise werden e_m grösste vollständig reduzible Gruppen eindeutig und auch der Reihenfolge nach eindeutig festgelegt. Die zugehörigen invarianten Zahlen sind die e_m Zahlen m, m, $\cdots$, m.

In der C. Jordanschen Normalform $\overline{G}$ stehen jetzt noch $m-1$ Kolonnen. Es lassen sich somit durch fortgesetztes Streichen $e_{m-1}-e_m$ aufeinander folgende grösste vollständig reduzible Gruppen mit je $m-1$ Variablen bestimmen. So erhalten wir die $e_{m-1}-e_m$ invarianten Zahlen $m-1$, $m-1$, $\cdots$, $m-1$.

Mit diesem Streichen fahren wir fort und erhalten schliesslich die e_1-e_2 invarianten Zahlen $1, 1, \cdots, 1$. Wir haben also das Resultat:

Sind $e_1, e_2, \cdots, e_m$ die ihrer Grösse nach geordneten Elementarteilerexponenten einer Substitution G von nicht verschwindender Determinante ($e_1 \geqq e_2 \geqq \cdots \geqq e_m$), so ist die Anzahl der Zahlen unseres Hauptsystems invarianter Zahlen der durch G und deren positive und negative Potenzen bestimmten Gruppe gleich e_1. Diese Zahlen sind ihrer Reihenfolge nach geordnet:

$$e_m \text{ mal die Zahlen } m, \quad m, \quad \cdots, m,$$

$$e_{m-1}-e_m \text{ mal die Zahlen } m-1, m-1, \cdots, m-1,$$

$$e_1-e_2 \text{ mal die Zahlen } 1, 1, \cdots, 1.$$

§ 4.

Um tiefer in den Zusammenhang unseres Hauptsystems invarianter Zahlen mit den Weierstrassschen Elementarteilerexponenten einzudringen, brauchen wir den in neueren Untersuchungen von G. Frobenius und J. Schur[1] wichtigen Begriff der associierten Zahlen.

---

[1] J. Schur, Ueber eine Klasse von Matrizen, die sich einer gegebenen Matrix zuordnen lassen. Dissertation, Berlin 1901, S. 41.

Die positive, ganze Zahl n sei zerlegt in:

$$n = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 2 + \lambda_3 \cdot 3 + \cdots + \lambda_m \cdot m;$$

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \cdots\ \lambda_{m-1},\ \lambda_m$$

sind positive, ganze Zahlen, die mit Ausnahme der letzten λ_m auch Null sein können.

Den $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m$ Zahlen $1, 2, \cdots, m$, wobei jede der zuletzt genannten Zahlen so oft gezählt wird, wie ihr Faktor λ angibt, ordnen wir ein neues Zahlsystem bei, indem wir unter den $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m$ Zahlen $1, 1, \cdots, 1$ (λ_1 fach), $2, 2, \cdots, 2$ (λ_2 fach), $\cdots, m, m, \cdots, m$ (λ_m fach) die Anzahl derjenigen Zahlen bestimmen, welche gleich oder grösser 1, gleich oder grösser 2, usw. gleich oder grösser m sind.

Die auf diese Weise zu bestimmenden Zahlen heissen die zu der Zerlegung

$$n = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 2 + \cdots + \lambda_m \cdot m$$

associierte Zerlegung oder die zu den Zahlen:

$$\begin{aligned} &1, \quad 1, \cdots, 1\ (\lambda_1 \text{ fach}), \\ &2, \quad 2, \cdots, 2\ (\lambda_2 \text{ fach}), \\ &\quad\ \vdots \\ &m, \quad m, \cdots, m\ (\lambda_m \text{ fach}) \end{aligned}$$

associierten Zahlen.

Bei der Zerlegung:

$$n = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 2 + \cdots + \lambda_m \cdot m$$

sind:

$$\begin{aligned} \geqq 1 \quad & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots + \lambda_m = \lambda^{(1)} \text{ Zahlen}, \\ \geqq 2 \quad & \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots + \lambda_m = \lambda^{(2)} \quad \text{„} \ , \\ \geqq 3 \quad & \lambda_3 + \cdots + \lambda_m = \lambda^{(3)} \quad \text{„} \ , \\ \vdots \quad & \\ \geqq m \quad & \lambda_m = \lambda^{(m)} \quad \text{„} \ . \end{aligned}$$

$\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots, \lambda^{(m)}$ sind die zu den $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m$ Zahlen:

$$\begin{aligned} &1, \quad 1, \cdots, 1\ (\lambda_1 \text{ fach}), \\ &2, \quad 2, \cdots, 2\ (\lambda_2 \text{ fach}), \\ &\quad\ \vdots \\ &m, \quad m, \cdots, m\ (\lambda_m \text{ fach}) \end{aligned}$$

associierten Zahlen. Es ist offenbar:

$$\lambda^{(1)} + \lambda^{(2)} + \cdots + \lambda^{(m)} = n$$

und

$$\lambda^{(1)} \geqq \lambda^{(2)} \geqq \lambda^{(2)} \geqq \cdots \geqq \lambda^{(m)}.$$

Wir wollen nun umgekehrt zu den m Zahlen $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \cdots, \lambda^{(m)}$ die associierten Zahlen bestimmen, indem wir unter den m Zahlen $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \cdots, \lambda^{(m)}$ die Anzahl der Zahlen bestimmen, welche gleich oder grösser 1, gleich oder grösser 2, $\cdots$, gleich oder grösser $\lambda^{(m)}$, $\lambda^{(m)} + 1, \cdots, \lambda^{(m-1)}, \cdots$, gleich oder grösser $\lambda^{(1)}$ sind:

Unter den Zahlen: $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \cdots, \lambda^{(m)}$ sind:

$$\begin{aligned} &\geqq 1 && m \text{ Zahlen}, \\ &\geqq 2 && m \quad \text{„} \quad , \\ &\vdots \\ &\geqq \lambda^{(m)} && m \quad \text{„} \quad ; \end{aligned}$$

denn nach ihrer Definition sind die Zahlen $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \cdots, \lambda^{(m-1)}$ wenigstens so gross wie $\lambda^{(m)}$. So erhalten wir zunächst $\lambda^{(m)} = \lambda_m$ mal die Zahl m.

Unter den Zahlen $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \cdots, \lambda^{(m)}$ sind:

$$\begin{aligned} &\geqq \lambda^{(m)} + 1 && m - 1 \text{ Zahlen}, \\ &\geqq \lambda^{(m)} + 2 && m - 1 \quad \text{„} \quad , \\ &\vdots \\ &\geqq \lambda^{(m-1)} && m - 1 \quad \text{„} \quad ; \end{aligned}$$

denn $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \cdots, \lambda^{(m-2)}$ sind jedenfalls nicht kleiner als $\lambda^{(m-1)}$.

So erhalten wir

$$\lambda^{(m-1)} - \lambda^{(m)} = \lambda_{m-1} + \lambda_m - \lambda_m = \lambda_{m-1} \text{ mal}$$

die Zahl $m - 1$.

Auf diese Weise fahren wir fort und finden, dass von den Zahlen $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \cdots, \lambda^{(m)}$

$$\begin{aligned} &\geqq \lambda^{(2)} + 1 && 1 \text{ Zahl}, \\ &\geqq \lambda^{(2)} + 2 && 1 \quad \text{„} \quad , \\ &\vdots \\ &\geqq \lambda^{(1)} && 1 \quad \text{„} \quad . \end{aligned}$$

Die Zahl 1 ergibt sich $\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)} = \lambda_1$ mal.

Wir haben somit das Resultat:

Die associierte Zerlegung zu der associierten Zerlegung einer ganzen, positiven Zahl ist wieder die ursprüngliche (J. Schur a. a. O. S. 41). Von diesem Satze machen wir zum näheren Studium des Hauptsystems invarianter Zahlen unserer speziellen Gruppe Gebrauch. Nach dem im voraufgehenden Paragraphen erhaltenen Resultate ist:

$$n = (e_1 - e_2)\cdot 1 + (e_2 - e_3)\cdot 2 + \cdots + (e_{m-1} - e_m)\,(m-1) + e_m \cdot m.$$

Die Aufstellung unseres Hauptsystems invarianter Zahlen ist, wie aus obiger Untersuchung hervorgeht, identisch mit der Bestimmung der zu den Elementarteilerexponenten $e_1, e_2, \cdots, e_m$ associierten Zahlen.

Damit haben wir den Satz bewiesen:

Hat man irgend eine Gruppe linearer homogener Substitutionen, die aus einer Substitution von nicht verschwindender Determinante und deren positiven und negativen Potenzen besteht, so sind die zu dem Hauptsystem invarianter Zahlen associierten Zahlen die Weierstrassschen Elementarteilerexponenten der die Gruppe erzeugenden Substitution.

Dieser innige Zusammenhang zwischen dem Hauptsystem invarianter Zahlen unserer speziellen Gruppe und den Weierstrassschen Elementarteilerexponenten ist, infolge des Satzes über die associierte Zerlegung einer associierten Zerlegung, umkehrbar. Das heisst:

Hat man die Weierstrassschen Elementarteilerexponenten einer Substitution von nicht verschwindender Determinante, so sind die zu den Elementarteilerexponenten associierten Zahlen das Hauptsystem invarianter Zahlen derjenigen Gruppe, die durch die Potenzen jener Substitution erzeugt wird; dabei sind diese Zahlen, die ja ihrer Reihenfolge nach bestimmt sind, fallend zu ordnen.

Wir haben bei unserer Gruppe, die aus den positiven und negativen Potenzen einer Substitution von nicht verschwindender Determinante besteht, immer von den Elementarteilerexponenten der erzeugenden Substitution gesprochen. Nun haben aber alle Potenzen (ausgenommen die 0te Potenz) einer Substitution von nicht verschwindender Determinante die gleichen Elementarteilerexponenten. (Dies ergibt sich sofort aus der C. Jordanschen Normalform der linearen homogenen Substitution, indem man die Potenzen wirklich bildet. Man vergleiche auch G. Frobenius, Ueber lineare Substitutionen und bili-

neare Formen, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 84 S. 25.)

§ 5.

Die im § 4 gewonnenen Resultate lassen sich verwerten bei der Betrachtung derjenigen linearen homogenen Substitutionen, die eine definite Hermitesche Form in sich transformieren. Für jede Gruppe linearer homogener Substitutionen, die eine definite Hermitesche Form in sich transformieren, gilt folgender von Herrn A. Loewy und Herrn G. Frobenius bewiesener Satz[1]: „Jede Gruppe linearer homogener Substitutionen, die eine definite Hermitesche Form in sich transformiert, ist vollständig reduzibel."

Betrachten wir eine einzelne lineare homogene Substitution von nicht verschwindender Determinante, die eine definite Hermitesche Form in sich transformiert, so transformieren alle Substitutionen der durch sie und ihre positiven und negativen Potenzen erzeugten Gruppe $\mathfrak{G}$ diese Hermitesche Form ebenfalls in sich.

Nach dem obigen Satze ist $\mathfrak{G}$ vollständig reduzibel. $\mathfrak{G}$ fällt in diesem Falle mit seiner ersten grössten vollständig reduziblen Gruppe zusammen. Ist die Gesamtzahl der Variablen n, so reduziert sich das Hauptsystem invarianter Gruppenzahlen in unserem Falle auf die Zahl n. Die zu der Zahl n associierten Zahlen sind die Zahlen $1, 1, \cdots, 1$ (n fach). Diese Zahlen sind nach § 4 die Elementarteilerexponenten der charakteristischen Funktion jeder Substitution der Gruppe $\mathfrak{G}$.

Wir haben somit das bekannte Theorem bewiesen: Die charakteristische Funktion einer linearen homogenen Substitution, die eine definite Hermitesche Form in sich transformiert, hat nur einfache Elementarteiler[1].

Nachdem dies nachgewiesen, lässt sich leicht zeigen, dass diese charakteristische Funktion, wie bekannt, ausschliesslich für Werte vom absoluten Betrage 1 verschwindet.

Die definite Hermitesche Form:

$$H = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \sum_{\beta=1}^{\beta=n} h_{\alpha\beta}\, x_\alpha\, x_\beta^0$$

---

[1] A. Loewy, Transactions 6, 1905, S. 509.

[2] G. Frobenius, Journal für die reine und angewandte Mathematik Bd. 95 S. 267. A. Loewy, Nova acta der Kaiserl. Leop.- Carol. Akademie der Naturforscher Bd. 71 S. 14.

werde durch die lineare homogene Substitution S von nicht verschwindender Determinante:

$$x_a = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ak}\, x_k'$$

und ihre konjugiert imaginäre Substitution:

$$x_a^0 = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ak}^0\, x_k^{0'}$$

in sich transformiert. Wir bemerken noch, dass der obere Index 0 stets die konjugiert imaginäre Grösse kennzeichnet. Da nach obigem Satze die charakteristische Funktion unserer linearen homogenen Substitution S nur einfache Elementarteiler besitzt, ist die C. Jordansche Normalform unserer Substitution nach § 3:

$$\xi_a = \rho_a\, \xi_a',$$

$$\xi_a^0 = \rho_a^0\, \xi_a^{0'}.$$

Da diese Substitution mit S ähnlich ist, wird durch sie und ihre Potenzen ebenfalls eine Hermitesche Form in sich transformiert. Man findet sie aus H durch Einführung der neuen Variablen ξ_a. Da H definit ist, folgt, dass auch die neue invariante Hermitesche Form:

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=n}\sum_{\beta=1}^{\beta=n} k_{\alpha\beta}\, \xi_\alpha\, \xi_\beta^0$$

definit sein muss.

Es ist also:

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=n}\sum_{\beta=1}^{\beta=n} k_{\alpha\beta}\, \xi_\alpha\, \xi_\beta^0 = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n}\sum_{\beta=1}^{\beta=n} k_{\alpha\beta}\, \rho_\alpha\, \rho_\beta^0\, \xi_\beta'\, \xi_\beta^{0'}$$

Wegen der Invarianz der Hermiteschen Form muss:

$$k_{\alpha\alpha} = \rho_\alpha\, \rho_\alpha^0\, k_{\alpha\alpha}\ (\alpha = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

sein. Da

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=n}\sum_{\beta=1}^{\beta=n} k_{\alpha\beta}\, \xi_\alpha\, \xi_\beta^0$$

eine definite Hermitesche Form ist, die nur verschwinden kann, wenn die Variablen sämtlich Null sind, ist

$$k_{aa} \gtrless 0$$

Aus:

$$k_{aa} = \rho_a \, \rho_a^0 \, k_{aa}$$

folgt daher durch Division mit k_{aa}:

$$\rho_a \cdot \rho_a^0 = 1 \ ,$$

das heisst: Jede Wurzel der charakteristischen Funktion einer linearen homogenen Substitution, die eine definite Hermitesche Form in sich transformiert, hat den absoluten Wert 1.

Zweiter Teil.

§ 1.

Den Koeffizienten der Substitutionen der untersuchten Gruppen sind in den vorangehenden Paragraphen keinerlei Beschränkungen auferlegt worden. Wir bewegten uns hinsichtlich der Koeffizienten im Rationalitätsbereiche aller Zahlen.

Jetzt wollen wir annehmen: Die Koeffizienten der Substitutionen der zu untersuchenden Gruppen gehören sämtlich einem Rationalitätsbereich oder Zahlkörper Ω an.

Es ist zunächst die Reduzibilität einer Gruppe linearer homogener Substitutionen mit Koeffizienten aus Ω bezüglich des Zahlkörpers Ω zu definieren:

„Für eine jede Gruppe $\mathfrak{G}$ linearer homogener Substitutionen in n Variablen mit Koeffizienten aus einem Körper Ω, die bezüglich des Körpers Ω reduzibel ist, existiert notwendig eine solche Matrix P von nicht verschwindender Determinante, dass die Matrices sämtlicher Substitutionen der Gruppe

$$\mathfrak{A} = P\mathfrak{G}P^{-1}$$

von der Form:

$$\begin{array}{llllll}
a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1m} & 0 & 0 \cdots & 0 \\
a_{22} & a_{21} \cdots & a_{2m} & 0 & 0 \cdots & 0 \\
\cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\
a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mm} & 0 & 0 \cdots & 0 \\
a_{m+1,1} & a_{m+1,2} \cdots & a_{m+1,m} & a_{m+1,m+1} & a_{m+1,m+2} \cdots & a_{m+1,n} \\
a_{m+2,1} & a_{m+2,2} \cdots & a_{m+2,m} & a_{m+2,m+1} & a_{m+2,m+2} \cdots & a_{m+2,n} \\
\cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\
a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nm} & a_{n,m+1} & a_{n,m+2} \cdots & a_{nn}
\end{array}$$

werden und ausschliesslich nur Koeffizienten aus Ω haben ($m < n$).“ (Transactions 4, 59.)

Eine Gruppe linearer homogener Substitutionen mit Koeffizienten aus Ω heisst bezüglich des Körpers Ω vollständig reduzibel, wenn es wenigstens eine konstante Matrix R von nicht verschwindender Determinante gibt, so dass die zu $\mathfrak{G}$ ähnliche Gruppe $\mathfrak{A} = R\mathfrak{G}R^{-1}$ von der besonderen Form:

$$\begin{matrix} \mathfrak{a}_{11} & 0 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & \mathfrak{a}_{22} & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{a}_{33} \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \mathfrak{a}_{\lambda\lambda} \end{matrix}$$

wird. Dabei sind $\mathfrak{a}_{11}, \mathfrak{a}_{22}, \cdots, \mathfrak{a}_{\lambda\lambda}$ bezüglich des Körpers Ω irreduzible Gruppen mit Koeffizienten aus Ω. Links und rechts der Diagonale stehen nur Nullmatrices. Die bezüglich Ω irreduziblen Gruppen mit Koeffizienten aus Ω sollen in der Bezeichnung „bezüglich Ω vollständig reduzibel“ enthalten sein. Es ist dann $\lambda = 1$.

Eine Gruppe $\mathfrak{G}$ linearer homogener Substitutionen mit Koeffizienten aus Ω heisst unter Hervorhebung ihrer in Bezug auf Ω grössten vollständig reduziblen Gruppe $\mathfrak{A}_{11}^*$ in die ähnliche Gruppe $\mathfrak{A}^*$, deren Substitutionen auch nur ausschliesslich Koeffizienten aus Ω besitzen sollen, transformiert, wenn die Gruppe $\mathfrak{A}^*$ von der besonderen Form:

$$\begin{matrix} \mathfrak{A}_{11}^* & 0 \\ \mathfrak{A}_{21}^* & \mathfrak{A}_{22}^* \end{matrix}$$

wird, wobei $\mathfrak{A}_{11}^*, \mathfrak{A}_{21}^*, \mathfrak{A}_{22}^*$ Inbegriffe von Matrices mit Koeffizienten aus Ω mit m Zeilen und m Kolonnen, bzw. $n - m$ Zeilen und m Kolonnen, bzw. $n - m$ Zeilen und $n - m$ Kolonnen bedeuten, $\mathfrak{A}_{11}^*$ eine in Bezug auf den Körper Ω vollständig reduzible Gruppe linearer homogener Substitutionen definiert, ferner es keine Matrix L von nicht verschwindender Determinante gibt, welche die Gruppe $\mathfrak{G}$ in eine ähnliche Gruppe $L\mathfrak{G}L^{-1}$ überführt, die auch nur ausschliesslich Koeffizienten aus Ω hat und die Form:

$$\begin{matrix} \mathfrak{A}_{11}^* & 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{a}_{\lambda+1,\,\lambda+1} & 0 \\ \mathfrak{A}_{31}^* & \mathfrak{A}_{32}^* & \mathfrak{A}_{33}^* \end{matrix}$$

besitzt, wobei $\alpha_{\lambda+1,\lambda+1}$ eine in Bezug auf den Körper Ω irreduzible Gruppe linearer homogener Substitutionen mit Koeffizienten aus Ω in $f_{\lambda+1}$ ($f_{\lambda+1} > 0$) Variablen bedeutet, und demnach $\mathfrak{A}^*_{31}$, $\mathfrak{A}^*_{32}$, $\mathfrak{A}^*_{33}$ Matrices mit $n - m - f_{\lambda+1}$ Zeilen und m bzw. $f_{\lambda+1}$, bzw. $n - m - f_{\lambda+1}$ Kolonnen vorstellen. (Transactions 6, 532.)

Es gilt nun der Satz:

„Wie auch immer eine Gruppe $\mathfrak{G}$ linearer homogener Substitutionen mit Koeffizienten aus Ω unter Hervorhebung ihrer in Bezug auf Ω grössten vollständig reduziblen Gruppe in eine ähnliche Gruppe mit Koeffizienten aus Ω transformiert wird, so hat die in Bezug auf Ω grösste vollständig reduzible Gruppe, die sich bei irgend einer derartigen Darstellung der Gruppe $\mathfrak{G}$ ergibt, gleichviele Variable wie die in Bezug auf Ω grösste vollständig reduzible Gruppe, die sich bei irgend einer andern derartigen Darstellung ergibt, und beide Gruppen sind ähnlich. Sieht man ähnliche Gruppen linearer homogener Substitutionen als nicht verschieden an, so ist die in Bezug auf Ω grösste vollständig reduzible Gruppe von $\mathfrak{G}$ eindeutig bestimmt.“ (Transactions 6, 533.)

Im I. Teil § 1 haben wir den Begriff der Transformation einer Gruppe $\mathfrak{G}$ unter Hervorhebung aller aufeinander folgender grösster vollständig reduzibler Gruppen auseinander gesetzt. Wir wollen jetzt die Gruppe $\mathfrak{G}$ mit Koeffizienten aus Ω derartig in eine ähnliche Gruppe mit Koeffizienten aus Ω transformieren, dass alle aufeinander folgenden grössten, in Bezug auf Ω vollständig reduziblen Gruppen hervorgehoben werden.

Für eine solche Transformation der Gruppe $\mathfrak{G}$ gilt der dem Fundamentalsatz des § 1, I. Teil analoge Satz:

„Zu jeder Gruppe $\mathfrak{G}$ linearer homogener Substitutionen mit Koeffizienten aus Ω gehören μ in Bezug auf Ω vollständig reduzible Gruppen linearer homogener Substitutionen mit Koeffizienten aus Ω; diese sind, wenn man ähnliche Gruppen als nicht verschieden ansieht, ihrer Reihenfolge nach eindeutig festgelegt. Man kann also von der ersten, zweiten, $\cdots$, μten in Bezug auf Ω vollständig reduziblen zu $\mathfrak{G}$ gehörigen Gruppe sprechen. Die Gesamtzahl der Variablen der μ Gruppen ist gleich der Variablenzahl von $\mathfrak{G}$.“ (Transactions 6, 533.)

§ 2.

Die im § 1 angeführten Sätze gestatten wie im I. Teil § 2, ein einer Gruppe $\mathfrak{G}$ linearer homogener Substitutionen mit Koeffizienten

aus Ω zugeordnetes System invarianter Zahlen zu definieren, das nach seiner Definition von dem Körper Ω abhängig ist.

Die Transformation der Gruppe $\mathfrak{G}$ in eine ähnliche Gruppe mit Koeffizienten aus dem Körper Ω unter Hervorhebung aller aufeinander folgender grösster, in Bezug auf Ω vollständig reduzibler Gruppen liefert μ grösste, in Bezug auf Ω vollständig reduzible Gruppen, die selbst eindeutig und auch der Reihenfolge nach eindeutig bestimmt sind. Jeder dieser grössten, in Bezug auf Ω vollständig reduziblen Gruppe ordnen wir wieder eine Zahl $n_1, n_2, \cdots, n_\mu$ bei, die gleich der Anzahl der in der betreffenden Gruppe auftretenden Variablen ist.

Wie aus obigem Fundamentalsatz hervorgeht, ist das System der Zahlen $n_1, n_2, \cdots, n_\mu$ eindeutig und auch der Reihenfolge nach eindeutig festgelegt. Das System der Zahlen $n_1, n_2, \cdots, n_\mu$ ist somit ein einer Gruppe $\mathfrak{G}$ linearer homogener Substitutionen mit Koeffizienten aus Ω und allen ihr ähnlichen Gruppen mit Koeffizienten aus Ω zugeordnetes System invarianter Zahlen. Es heisse das der Gruppe bezüglich Ω zugeordnete Hauptsystem invarianter Zahlen.

Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, unser Zahlensystem $n_1, n_2, \cdots, n_\mu$ mit den bezüglich des Körpers Ω definierten Weierstrassschen Elementarteilerexponenten einer linearen homogenen Substitution von nicht verschwindender Determinante mit Koeffizienten aus Ω in Zusammenhang zu bringen.

§ 3.

G sei eine lineare homogene Substitution in n Variablen von nicht verschwindender Determinante mit Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereich Ω. Die charakteristische Funktion $|\rho E - G|$ zerlegen wir in ihre Elementarteiler; da wir hier den Körper Ω nicht verlassen wollen, so haben wir es nicht mit linearen Faktoren, sondern mit ganzen im Rationalitätsbereich Ω irreduziblen Funktionen zu tun[1].

Es sei:

$$|\rho E - G| = \varphi_1(\rho)^{\tau_1} \cdot \varphi_2(\rho)^{\tau_2} \cdot \cdots \cdot \varphi_m(\rho)^{\tau_m}$$

$\varphi_1(\rho), \varphi_2(\rho), \cdots, \varphi_m(\rho)$ bedeuten ganze Funktionen von ρ mit Koeffizienten aus Ω, die im Körper Ω irreduzibel sind.

---

[2] G. Frobenius, Theorie der linearen Formen mit ganzen Koeffizienten. Journal für die reine und angewandte Mathematik Bd. 86, S. 206.

Dabei sei die Bezeichnung so gewählt, dass

$$\tau_1 \geqq \tau_2 \geqq \cdots \geqq \tau_m .$$

$\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_m$ nennen wir die bezüglich Ω definierten Weierstrassschen Elementarteilerexponenten.

Es sei:

$$\varphi_1(\rho) = \rho^\alpha + a_1 \rho^{\alpha-1} + a_2 \rho^{\alpha-2} + \cdots + a_\alpha ,$$

$$\varphi_2(\rho) = \rho^\beta + b_1 \rho^{\beta-1} + b_2 \rho^{\beta-2} + \cdots + b_\beta ,$$

$$\vdots$$

$$\varphi_m(\rho) = \rho^\mu + m_1 \rho^{\mu-1} + m_2 \rho^{\mu-2} + \cdots + m_\mu .$$

Wir können zwei Matrices angeben, deren Determinanten die Werte $\varphi_1(\rho)$, bzw. $\varphi_1(\rho)^{\tau_1}$ haben:

$$\begin{vmatrix} \rho + a_1 & a_2 & a_3 \cdots a_\alpha \\ -1 & \rho & 0 \cdots 0 \\ 0 & -1 & \rho \cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \; -1 \; \rho \end{vmatrix}$$

und

$$\begin{vmatrix} \rho + a_1 & a_2 \cdots a_\alpha & 0 & 0 \cdots 0 \cdots \\ -1 & \rho \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \cdots -1 \; \rho & 0 & 0 \cdots 0 \cdots \\ 0 & 0 \cdots -1 \; \rho + a_1 & a_2 \cdots a_\alpha & \cdots \\ 0 & 0 \quad 0 \; -1 & \rho \cdots 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \quad 0 \quad 0 & 0 \cdots -1 \; \rho & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

Die zuletzt hingeschriebene Matrix mit $\alpha\tau_1$ Zeilen und Kolonnen ist so gebildet, dass in der Reihe, die parallel zur Diagonale linker Hand ist, überall die Zahl — 1 steht. Mit Hilfe dieser Matrix bilden

wir die lineare homogene Substitution mit Koeffizienten aus Ω mit $\alpha\tau_1$ Variablen:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -a_1\,\xi_1 - a_2\,\xi_2 - \cdots - a_a\,\xi_a\\
x_2 &= \xi_1\\
x_3 &= \xi_2\\
&\vdots\\
x_a &= \xi_{a-1}\\
x_{a+1} &= \xi_a - a_1\,\xi_{a+1} - a_2\,\xi_{a+2} - \cdots - a_a\,\xi_{2a}\\
x_{a+2} &= \xi_{a+1}\\
&\vdots\\
x_{2a} &= \xi_{2a-1}\\
&\vdots\\
x_{(\tau_1-1)a+1} &= \xi_{(\tau_1-1)a} - a_1\,\xi_{(\tau_1-1)a+1} - a_2\,\xi_{(\tau_1-1)a+2} - \cdots - a_a\,\xi_{\tau_1 a}\\
x_{(\tau_1-1)a+2} &= \xi_{(\tau_1-1)a+1}\\
&\vdots\\
x_{\tau_1 a} &= \xi_{\tau_1 a-1}.
\end{aligned}
$$

Diese lineare homogene Substitution wollen wir fernerhin mit $N^{(1)}_{\tau_1 a}$ bezeichnen. Die charakteristische Funktion von $N^{(1)}_{\tau_1 a}$ hat den einen Elementarteiler $\varphi_1(\rho)^{\tau_1}$; denn ihre Determinante ist $\varphi_1(\rho)^{\tau_1}$ und diejenige erste Unterdeterminante, welche man aus obiger Determinante durch Streichen der ersten Zeile und letzten Kolonne erhält, hat eine Potenz von (-1) zum Wert. Sie ist also nicht durch $\varphi_1(\rho)^{\tau_1}$ teilbar. Wir weisen auch mit Rücksicht auf das Folgende darauf hin, dass die Substitution:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -a_1\,\xi_1 - a_2\,\xi_2 - \cdots - a_a\,\xi_a\\
x_2 &= \xi_1\\
&\vdots\\
x_a &= \xi_{a-1},
\end{aligned}
$$

die wir mit $T^{(1)}_a$ bezeichnen wollen, mit ihren positiven und negativen Potenzen eine bezüglich Ω irreduzible Gruppe erzeugt; denn wäre diese Gruppe reduzibel, so wäre $\varphi_1(\rho)$ nicht im Körper Ω irreduzibel.

Durch Streichen der Variablen $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_a$ in $N^{(1)}_{\tau_1 a}$ erhält man eine zweite bezüglich Ω irreduzible Gruppe. Sie wird erzeugt durch die Substitution $T^{(2)}_a$:

$$
\begin{aligned}
x_{a+1} &= -a_1\,\xi_{a+1} - a_2\,\xi_{a+2} - \cdots - a_a\,\xi_{2a}\\
x_{a+2} &= \xi_{a+1}\\
&\vdots\\
x_{2a} &= \xi_{2a-1}
\end{aligned}
$$

und deren positive und negative Potenzen. Fahren wir so mit dem Streichen der Variablen fort, so können wir τ_1 bezüglich Ω irreduzible Gruppen definieren, welche durch die Substitutionen $T_\alpha^{(1)}$, $T_\alpha^{(2)}$, $\cdots$, $T_\alpha^{(\tau_1)}$ und deren positive und negative Potenzen erzeugt werden.

Ebenso lassen sich den Funktionen $\varphi_2(\rho)^{\tau_2}$, $\varphi_3(\rho)^{\tau_3}$, $\cdots$, $\varphi_m(\rho)^{\tau_m}$ Matrices mit $\beta\tau_2$, bzw. $\gamma\tau_3$, bzw. $\mu\tau_m$ Zeilen und Kolonnen zuordnen.

Aus jeder dieser Matrices bilden wir wieder eine lineare homogene Substitution mit Koeffizienten aus Ω, die wir der Reihenfolge nach mit $N_{\tau_2\beta}^{(2)}$, $N_{\tau_3\gamma}^{(3)}$, $N_{\tau_m\mu}^{(m)}$ bezeichnen. Die charakteristischen Funktionen dieser linearen homogenen Substitutionen mit Koeffizienten aus Ω haben jeweils nur den einen Elementarteiler $\varphi_2(\rho)^{\tau_2}$, $\cdots$, $\varphi_m(\rho)^{\tau_m}$, denn die Unterdeterminanten, die sich durch Streichen der ersten Zeile und letzten Kolonne ergeben, haben alle eine Potenz von (-1) zum Wert, und ihre Determinanten sind gleich $\varphi_2(\rho)^{\tau_2}$, bzw. $\varphi_3(\rho)^{\tau_3}$, bzw. $\varphi_m(\rho)^{\tau_m}$.

Vermittelst der linearen homogenen Substitution $N_{\tau_2\beta}^{(2)}$ können wir wie oben durch Streichen der Variablen τ_2 irreduzible Gruppen definieren; sie seien bezeichnet mit $T_\beta^{(1)}$, $T_\beta^{(2)}$, $\ldots$, $T_\beta^{(\tau_2)}$.

Ebenso ergeben sich aus $N_{\tau_3\gamma}^{(3)}$, $\ldots\ldots$, $N_{\tau_m\mu}^{(m)}$ τ_3, $\ldots$, τ_m irreduzible Gruppen mit Koeffizienten aus Ω.

Wir bilden nun die zerlegbare Substitution $\overline{G}$ in $\tau_1\alpha + \tau_2\beta + \cdots + \tau_m\mu$ Variablen, die, symbolisch geschrieben, lautet:

$$\begin{array}{cccc}
N_{\tau_1\alpha}^{(1)} & 0 & 0 \cdots 0 & 0 \\
0 & N_{\tau_2\beta}^{(2)} & 0 \cdots 0 & 0 \\
0 & 0 & N_{\tau_3\gamma}^{(3)} \cdots 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 \cdots N_{\tau_{m-1}\lambda}^{(m-1)} & 0 \\
0 & 0 & 0 \cdots 0 & N_{\tau_m\mu}^{(m)}.
\end{array}$$

Ihre charakteristische Funktion hat offenbar die Elementarteiler $\varphi_1(\rho)^{\tau_1}$, $\varphi_2(\rho)^{\tau_2}$, $\ldots$, $\varphi_m(\rho)^{\tau_m}$. $\overline{G}$ ist daher ähnlich zu G und auch $\overline{G}$ hat nur Koeffizienten aus dem Zahlkörper Ω.

Wir studieren die lineare homogene Substitution G nicht isoliert, sondern die Gruppe $\mathfrak{G}$ oder die ihr ähnliche Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$, die aus $\overline{G}$ und seinen positiven und negativen Potenzen besteht.

$\overline{G}$ bietet uns dabei wieder den grossen Vorteil, dass die aufeinander folgenden grössten, in Bezug auf Ω vollständig reduziblen Gruppen in Evidenz treten.

Die erste grösste, in Bezug auf Ω vollständig reduzible Gruppe ist gegeben durch die Transformation:

$$\begin{array}{ccccc} T_{\alpha}^{(1)} & 0 & 0 \cdot \cdot \cdot \cdot 0 & 0 \\ 0 & T_{\beta}^{(1)} & 0 \cdot \cdot \cdot \cdot 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_{\gamma}^{(1)} \cdot \cdot \cdot 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \cdot \cdot \cdot \cdot T_{\lambda}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \cdot \cdot \cdot \cdot 0 & T_{\mu}^{(1)} \end{array}$$

und ihre positive und negative Potenzen. Die Gesamtzahl der Variablen ist:

$$\alpha + \beta + \gamma + \cdot \cdot \cdot \cdot + \lambda + \mu = i_1.$$

Die erste Zahl unseres Hauptsystems invarianter Zahlen ist somit die Zahl i_1.

Die zweite grösste, in Bezug auf Ω vollständig reduzible Gruppe wird erzeugt durch die Transformation:

$$\begin{array}{ccccc} T_{\alpha}^{(2)} & 0 & 0 \cdot \cdot \cdot \cdot 0 & 0 \\ 0 & T_{\beta}^{(2)} & 0 \cdot \cdot \cdot \cdot 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_{\gamma}^{(2)} \cdot \cdot \cdot 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \cdot \cdot \cdot \cdot T_{\lambda}^{(2)} \cdot \cdot \cdot \cdot 0 & \\ 0 & 0 & 0 \cdot \cdot \cdot \cdot 0 & T_{\mu}^{(2)} \end{array}$$

und deren Potenzen mit wieder

$$\alpha + \beta + \gamma + \cdot \cdot \cdot \cdot + \lambda + \mu = i_1$$

Variablen. Die zweite Zahl unseres Hauptsystems invarianter Zahlen ist wieder i_1.

Auf diese Weise können wir τ_m grösste, in Bezug auf Ω vollständig reduzible Gruppen mit

$$\alpha + \beta + \gamma + \cdots + \lambda + \mu = i_1$$

Variablen festlegen. Damit haben wir aber die letzte Kolonne der Frobeniusschen Normalform G, nämlich $N_{\tau_m 0}^{(m)}$, erschöpft.

Wir haben so die ersten τ_m Zahlen unseres Hauptsystems invarianter Zahlen $i_1, i_1, \ldots i_1$ ($\tau_m$fach) eindeutig festgelegt. Die nächste grösste, in Bezug auf Ω vollständig reduzible Gruppe ist uns gegeben durch die Transformation:

$$\begin{array}{cccc} T_{\alpha}^{(\tau_m+1)} & 0 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & T_{\beta}^{(\tau_m+1)} & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 0 & T_{\gamma}^{(\tau_m+1)} \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & T_{\lambda}^{(\tau_m+1)} \end{array}$$

und deren Potenzen mit $\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda = i_2$ Variablen. Bis zur Erschöpfung von $N_{\tau_{m-1}\lambda}^{(m-1)}$ können wir $\tau_{m-1} - \tau_m$ grösste, in Bezug auf Ω vollständig reduzible Gruppen mit je $\alpha + \beta + \gamma + \cdots + \lambda = i_2$ Variablen bestimmen. So finden wir die nächsten $\tau_{m-1} - \tau_m$ Zahlen unseres Hauptsystems invarianter Zahlen:

$$i_2, i_2, \cdots, i_2 \ (\tau_{m-1} - \tau_m \text{fach}).$$

Fahren wir so fort, so erhalten wir schliesslich $\tau_1 - \tau_2$ grösste, in Bezug auf Ω vollständig reduzible Gruppen, die erzeugt werden durch die Transformationen:

$$\begin{array}{ll} & T_{\alpha}^{(\tau_2+1)} \quad \text{und deren Potenzen,} \\ \text{bzw.} & T_{\alpha}^{(\tau_2+2)} \quad \text{„ „ „} \\ & \vdots \\ \text{bzw.} & T_{\alpha}^{(\tau_1)} \quad \text{„ „ „} \end{array}$$

mit je α Variablen. Somit bekommen wir die letzten $\tau_1 - \tau_2$ Zahlen unseres Hauptsystems invarianter Zahlen:

$$\alpha, \alpha, \cdots, \alpha = i_m \ (\tau_1 - \tau_2 \text{fach}).$$

Wir haben das Resultat:

Bedeuten $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m$ die ihrer Grösse nach geordneten, bezüglich des Körpers Ω definierten Elementarteilerexponenten ($\tau_1 \geqq \tau_2 \geqq \ldots \geqq \tau_m$) einer Substitution G von nicht verschwindender Determinante mit Koeffizienten aus einem Zahlkörper Ω, so ist für die Gruppe $\mathfrak{G}$, die aus einer Substitution G und deren positiven und negativen Potenzen besteht, die Anzahl der Zahlen unseres Hauptsystems invarianter Zahlen bezüglich Ω gleich τ_1.

Diese Zahlen selbst sind ihrer Reihenfolge nach geordnet:

$$\begin{aligned}
&\tau_m \text{ mal die Zahlen: } i_1, i_1, \cdots, i_1, \quad i_1 = \alpha + \beta + \gamma + \cdots + \lambda + \mu,\\
&\tau_{m-1} - \tau_m \text{ mal die Zahlen: } i_2, i_2, \cdots, i_2, \quad i_2 = \alpha + \beta + \gamma + \cdots + \lambda,\\
&\tau_{m-2} - \tau_{m-1} \text{ mal die Zahlen: } i_3, i_3, \cdots, i_3, \quad i_3 = \alpha + \beta + \gamma + \cdots + k,\\
&\qquad\vdots\\
&\tau_1 - \tau_2 \text{ mal die Zahlen: } i_m, i_m, \cdots, i_m, \quad i_m = \alpha.
\end{aligned}$$

Es ist offenbar:

$$i_1 \geqq i_2 \geqq \cdots \geqq i_m.$$

§ 4.

Zur weiteren Erforschung des Systems invarianter Gruppenzahlen für den Zahlkörper Ω bestimmen wir zu ihm die associierten Zahlen. Unter den folgenden τ_1 Zahlen:

i_1 (τ_m fach), i_2 ($\tau_{m-1} - \tau_m$ fach), $\cdots$, i_m ($\tau_1 - \tau_2$ fach), wobei $i_1 \geqq i_2 \geqq \cdots \geqq i_m$ ist, sind:

$$\begin{aligned}
&\geqq 1 && \tau_1 \text{ Zahlen},\\
&\geqq 2 && \tau_1 \quad " \quad ,\\
&\qquad\vdots\\
&\geqq i_m = \alpha && \tau_1 \quad " \quad ,\\
&\geqq i_m + 1 && \tau_2 \quad " \quad ,\\
&> i_m + 2 && \tau_2 \quad " \quad ,\\
&\qquad\vdots\\
&> i_{m-1} = \alpha + \beta && \tau_2 \quad " \quad ,\\
&\qquad\vdots\\
&\geqq i_2 + 1 = \alpha + \beta + \cdots + \lambda + 1 && \tau_m \text{ Zahlen},\\
&\geqq i_1 = \alpha + \beta + \cdots + \lambda + \mu && \tau_m \quad " \quad .
\end{aligned}$$

Die associierten Zahlen zu dem Hauptsystem invarianter Zahlen für Ω sind also α mal die Zahl τ_1, β mal die Zahl τ_2, $\ldots$, μ mal die Zahl τ_m.

Wir behaupten nun, dass das für den Zahlkörper Ω erhaltene Hauptsystem invarianter Zahlen i_1 (τ_m fach), i_2 ($\tau_{m-1} - \tau_m$ fach), ..., i_m ($\tau_1 - \tau_2$ fach) identisch ist mit dem Hauptsystem invarianter Zahlen für den Körper aller Zahlen. Zu diesem Zweck betrachten wir $\varphi_1(\rho)$, eine Funktion, die in ρ vom αten Grade ist. $\varphi_1(\rho)$ ist im Körper Ω irreduzibel und lässt sich daher im Rationalitätsbereich aller Zahlen in α verschiedene, lineare Faktoren zerlegen. Es ist also:

$$\varphi_1(\rho)^{\tau_1} = (\rho - \rho_1)^{\tau_1} \cdot (\rho - \rho_2)^{\tau_1} \cdot \ldots \cdot (\rho - \rho_\alpha)^{\tau_1}$$

wobei $\rho_2 \neq \rho_1 \neq \ldots \neq \rho_\alpha$ ist.

Nun hat die Determinante $\varphi_1(\rho)^{\tau_1}$ für den Körper aller Zahlen die Elementarteiler $(\rho - \rho_1)^{\tau_1}$, $(\rho - \rho_2)^{\tau_1}$, ..., $(\rho - \rho_\alpha)^{\tau_1}$; denn die Unterdeterminanten der zu $\varphi_1(\rho)^{\tau_1}$ gehörigen Matrix, welche man durch Streichen der ersten Zeile und letzten Kolonne erhält, hat, wie wir im § 3 sahen, einePotenz von (— 1) zum Wert und ist demnach nicht durch $(\rho - \rho_1)$, bzw. $(\rho - \rho_2)$, ..., bzw. $(\rho - \rho_\alpha)$ teilbar.

Damit haben wir gezeigt, dass die Substitution G im Körper aller Zahlen die Weierstrassschen Elementarteilerexponenten τ_1, τ_1, ..., τ_1 (α fach), τ_2, τ_2, ..., τ_2 (β fach), ..., τ_m, τ_m, ..., τ_m (μ fach) besitzt. Da diese Zahlen identisch sind mit den im Anfang dieses Paragraphen erhaltenen, so sind ihre associierten Zahlen die im § 3 gefundenen Zahlen; das heisst: Die zu den Weierstrassschen Elementarteilerexponenten τ_1, τ_1, ..., τ_1 (α fach), τ_2, τ_2, ..., τ_2 (β fach), ..., τ_m, τ_m, ..., τ_m (μ fach) associierten Zahlen sind die Zahlen des Hauptsystems invarianter Zahlen für den Körper Ω. Es waren aber die zu den Weierstrassschen Elementarteilerexponenten associierten Zahlen nach dem I. Teil das Hauptsystem invarianter Zahlen für den Körper aller Zahlen. Daher folgt:

Das Hauptsystem invarianter Zahlen für den Körper aller Zahlen ist also dasselbe wie für den besonderen Zahlkörper Ω. Damit haben wir den Satz bewiesen:

Hat man eine Gruppe linearer homogener Substitutionen mit Koeffizienten aus Ω, die aus einer Substitution von nicht verschwindender Determinante und deren positiven und negativen Potenzen besteht, so ist das der Gruppe zugeordnete Hauptsystem invarianter Zahlen unabhängig von dem durch die Substitutionskoeffizienten der Gruppe bestimmten Zahlkörper.

Wir knüpfen hieran noch eine Bemerkung, die sich auf die für den Körper Ω definierten Elementarteilerexponenten einer Substitution

von nicht verschwindender Determinante mit Koeffizienten aus Ω bezieht.

Bei der Untersuchung der Gruppe $\mathfrak{G}$, die aus den Potenzen einer Substitution von nicht verschwindender Determinante mit Koeffizienten aus dem Körper aller Zahlen besteht, haben wir im § 4, I. Teil ausdrücklich darauf hingewiesen, dass alle Potenzen (ausgenommen die 0te Potenz) der dort die Gruppe erzeugenden Substitution die gleichen Elementarteilerexponenten besitzen. Dies gilt, wenn unsere die Gruppe erzeugende Substitution Koeffizienten aus dem besonderen Zahlkörper Ω hat, nicht mehr; für den bezüglich Ω definierten Elementarteilerbegriff muss man für den Körper Ω stets von den Elementarteilerexponenten der die Gruppe erzeugenden Substitution sprechen.

Zum Beweise nehmen wir an: Die erzeugende Substitution G habe ausschliesslich reelle Koeffizienten und für den Körper aller reellen Zahlen den einen Elementarteiler $\varphi_1(\rho)^{\tau_1} = \rho^2 + 1$. Dann lautet die Frobeniussche Normalform $\overline{G}$ der linearen homogenen Substitution:

$$x_1 = -\xi_2$$
$$x_2 = \xi_1 .$$

Ihre charakteristische Funktion:

$$\begin{vmatrix} -\rho & -1 \\ 1 & -\rho \end{vmatrix}$$

hat nur den einen Elementarteiler $\rho^2 + 1$.

Die zweite Potenz von $\overline{G}$ lautet:

$$x_1 = -\xi_1$$
$$x_2 = -\xi_2 .$$

Die charakteristische Funktion:

$$\begin{vmatrix} -1-\rho & 0 \\ 0 & -1-\rho \end{vmatrix}$$

hat für den Körper aller reellen Zahlen die Elementarteiler $(-1-\rho)^1$ und $(-1-\rho)^1$. Wir sehen, dass der Elementarteilerexponent 1 von $(\rho^2+1)^1$ für die Gruppe, die aus den Potenzen der Substitution $\overline{G}$

besteht, keine Invariante ist; vielmehr hat die zweite Potenz schon für den Körper aller reellen Zahlen die zwei Elementarteilerexponenten 1, 1.

§ 5.

Jeder Zahl des Hauptsystems invarianter Zahlen einer beliebigen Gruppe linearer homogener Substitutionen von nicht verschwindender Determinante mit Koeffizienten aus Ω (wobei Ω auch natürlich der Körper aller Zahlen sein kann) lässt sich wiederum ein Zahlensystem zuordnen. Es heisst das Nebensystem invarianter Zahlen, das zu jeder Zahl des Hauptsystems gehört.

Die Transformation einer Gruppe $\mathfrak{G}$ linearer homogener Substitutionen in eine ähnliche Gruppe unter Hervorhebung aller aufeinander folgender grösster vollständig reduzibler Gruppen ergab nach § 1, II. Teil μ grösste vollständig reduzible Gruppen mit n_1, bzw. n_2, bzw. n_μ Variablen, nämlich die Gruppen $\mathfrak{A}^*_{11}$, $\mathfrak{A}^*_{22}$, ... $\mathfrak{A}^*_{\mu\mu}$. Es gilt nun folgender Satz:

„Wie auch immer eine lineare homogene Substitutionsgruppe mit Koeffizienten aus einem Körper Ω unter Hervorhebung ihrer bezüglich des Körpers Ω irreduziblen Bestandteile in eine ähnliche Gruppe, die auch nur Koeffizienten aus Ω hat, transformiert wird, so kann man die irreduziblen Bestandteile, die sich bei irgend einer solchen Darstellung ergeben, den irreduziblen Bestandteilen, die sich bei irgend einer andern solchen Darstellung ergeben, eindeutig zuordnen, dass zwei zugeordnete, bezüglich Ω irreduzible Teilgruppen gleich viele Variablen haben und ähnliche Gruppen sind.“ (Transactions 4, 61.)

Wir wenden diesen Satz auf $\mathfrak{A}^*_{11}$, $\mathfrak{A}^*_{22}$, ..., $\mathfrak{A}^*_{\mu\mu}$ an.

Jede dieser grössten vollständig reduziblen Gruppen zerfällt in bezüglich Ω irreduzible Teilgruppen, die selbst eindeutig, aber nicht der Reihenfolge nach eindeutig bestimmt sind. Jeder der irreduziblen Teilgruppen von $\mathfrak{A}^*_{11}$ ordnen wir nun eine Zahl n'_1, n'_2, ..., n'_λ, die gleich der Anzahl der in der betreffenden Teilgruppe auftretenden Variablen ist, zu. Dabei ist:

$$n_1 = n'_1 + n'_2 + \cdots + n'_\lambda.$$

Das der Zahl n_1, der ersten Zahl unseres Hauptsystems invarianter Zahlen zugeordnete Nebensystem n'_1, n'_2, ..., n'_λ, ist eindeutig, aber nicht der Reihenfolge nach eindeutig festgelegt.

Ebenso ordnen wir den andern Zahlen unseres Hauptsystems invarianter Zahlen, nämlich den Zahlen $n_2, n_3, \ldots, n_\mu$, ein Nebensystem $n_1^{(2)}, n_2^{(2)}, \ldots, n_{\lambda''}^{(2)}$, bzw. $n_1^{(3)}, n_2^{(3)}, \ldots, n_{\lambda''}^{(3)}, \ldots$ bei; dabei ist:

$$\begin{aligned} n_2 &= n_1^{(2)} + n_2^{(2)} + \ldots + n_{\lambda''}^{(2)}, \\ n_3 &= n_1^{(3)} + n_2^{(3)} + \ldots + n_{\lambda''}^{(3)}, \\ &\vdots \\ n_\mu &= n_1^{(\mu)} + n_2^{(\mu)} + \ldots + n_{\lambda^{(\mu-1)}}^{(\mu)}. \end{aligned}$$

Im II. Teil § 3 ergab die Transformation der Gruppe $\mathfrak{G}$, die aus einer Substitution und deren Potenzen mit Koeffizienten aus Ω besteht, bei der Hervorhebung aller aufeinander folgender grösster, in Bezug auf Ω vollständig reduzibler Gruppen als erste grösste, in Bezug auf Ω vollständig reduzible Gruppe die Gruppe, die durch die Transformation:

$$\begin{matrix} T_\alpha^{(1)} & 0 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & T_\beta^{(1)} & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_\gamma^{(1)} \ldots 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots T_\lambda^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & T_\mu^{(1)} \end{matrix}$$

und deren Potenzen bestimmt ist. Jeder der in Bezug auf Ω irreduziblen Teilgruppen dieser grössten, in Bezug auf Ω vollständig reduziblen Gruppe, die durch die Transformation $T_\alpha^{(1)}$ und deren Potenzen, bzw. $T_\beta^{(1)}$ und deren Potenzen, ..., bzw. $T_\mu^{(1)}$ und deren Potenzen gegeben sind, ordnen wir der Reihenfolge nach eine Zahl α, bzw. β, bzw. μ zu, die gleich der Anzahl der in der betreffenden in Bezug auf Ω irreduziblen Gruppe auftretenden Variablen ist. Das System der Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda, \mu$ ist selbst eindeutig, aber nicht der Reihenfolge nach eindeutig bestimmt. Somit ist das der ersten Zahl unseres Hauptsystems invarianter Zahlen, nämlich der Zahl i_1, zugeordnete Nebensystem das System $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda, \mu$.

Auf diese Weise können wir jeder der τ_m ersten Zahlen des Hauptsystems, nämlich den Zahlen $i_1, i_1, \ldots, i_1$ ($\tau_m$fach), das Nebensystem $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mu$ zuordnen. Dabei ist:

$$i_1 = \alpha + \beta + \ldots + \lambda + \mu.$$

Zu jeder der folgenden $(\tau_{m-1} - \tau_m)$ Zahlen des Hauptsystems, nämlich zu den Zahlen $i_2, i_2, \ldots, i_2$ $(\tau_{m-1} - \tau_m$ fach), gehört das Nebensystem $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$, wobei:

$$i_2 = \alpha + \beta + \gamma + \cdots + \lambda \text{ ist.}$$

Schliesslich gehört zu jeder der letzten $\tau_1 - \tau_2$ Zahlen unseres Hauptsystems, nämlich zu den Zahlen $i_m, i_m, \ldots, i_m$ $(\tau_1 - \tau_2$ fach), die Zahl α.

Wählen wir im besonderen in dieser Untersuchung für Ω den Körper aller Zahlen, so besteht das jeder Zahl des Hauptsystems invarianter Zahlen zugeordnete Nebensystem aus lauter Einsen.

G.E.STECHERT
& Co.
NEW YORK

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
3 0112 001754651